▶ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μάθημα 3ο 9/10/20

$z = a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

$Re(z) = a$ ⇝ πραγματικό μέρος

$Im(z) = b$ ⇝ φανταστικό μέρος

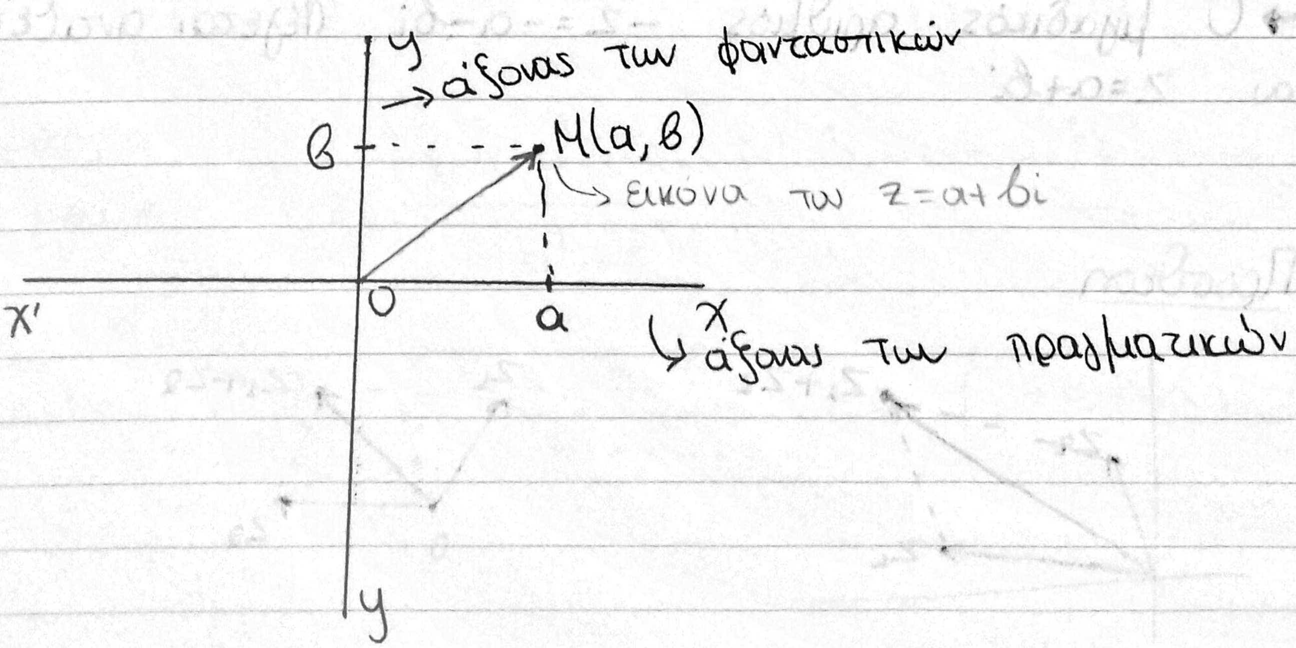
Ισότητα μιγαδικών Αριθμών

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i \qquad z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$

$z_1 = z_2 \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow} a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$

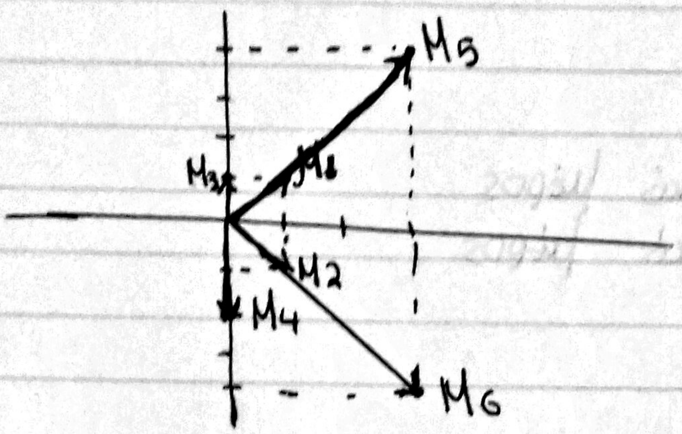
$a + b \cdot i = 0 = 0 + 0 \cdot i \Leftrightarrow a = 0$ και $b = 0$

Γεωμετρική Παράσταση Μιγαδικών Αριθμών



Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται διανυσματική ακτίνα του $z = a + bi$

Φυλλάδιο #1 / Άσκηση 1



Πράξεις Μιγαδικών Αριθμών

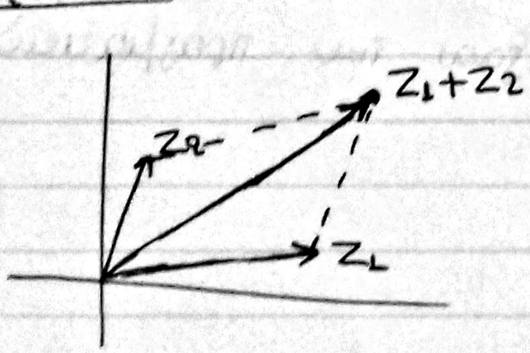
$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i \qquad z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$

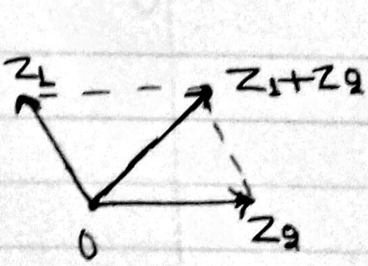
$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$

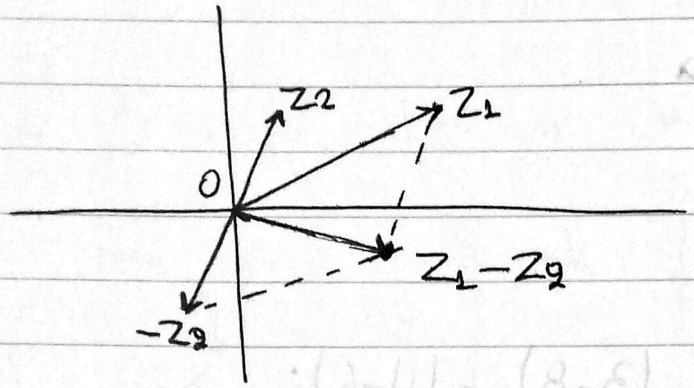
→ Ο μιγαδικός αριθμός $-z = -a - bi$ λέγεται αντίθετος του $z = a + bi$

Πρόσθεση





Αφαίρεση



$z_1 - z_2$

Πολλαπλασιασμός:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 + b_2 \cdot i)$$
$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \cdot i^2$$
$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i$$

Διαίρεση:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 \cdot i}{a_2 + b_2 \cdot i} \quad \frac{\text{πολ. με συζυγή}}{\text{του παρονομ.}} \quad \frac{(a_1 + b_1 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)}{(a_2 + b_2 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i)}$$

$z_2 \neq 0$
$\Rightarrow \cancel{a_2 + b_2 \cdot i \neq 0} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_2 + b_2 \cdot i \neq 0 + 0 \cdot i$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + (b_1 \cdot a_2 - a_1 b_2) \cdot i}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a^2 + b^2} + \frac{b_1 \cdot a - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot i \in \mathbb{C} \rightarrow \text{σύνολο μιγαδικών Αριθμών}$$

$\mathbb{C}$ $\pm$ | $\mathbb{R}$ $\pm$ $\cdot$ $/$ | $\mathbb{Q}$ $\pm$ $\cdot$ $/$

σώμα   σώμα   σώμα

Παράδειγμα Διαίρεσης

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \frac{(3-8)+(4-6)i}{25}$$

$$= \frac{-5+10i}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cdot i$$

Οι πραγματικοί Αριθμοί έχουν Διάταξη ενώ οι Μιγαδικοί όχι.

Πραγματικοί

$a > b \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} a - b > 0$

$\mathbb{R}^+$ Θετικοί πραγματικοί

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$ ή $a = 0$ ή $-a \in \mathbb{R}^+$,

$a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$

Στους μιγαδικούς δεν έχω διάταξη.

Έστω $i \in \mathbb{C}^+$

$2 > 1$

$2 \cdot i > 1 \cdot i$

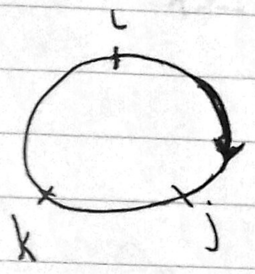
$2i^2 > i^2$

$-2 > -1$ ΑΤΟΠΟ

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq H_4 \leftarrow$ $a + bi + \gamma \cdot j + \delta \cdot k \quad , a, b, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Hamilton τετράδες ή τετράνια.

$i^2=-1$, $j^2=-1$, $k^2=-1$ και $i \neq j \neq k$.



$i \cdot j = k$	$j i = -k$
$j k = i$	$k \cdot j = -i$
$k i = j$	$i \cdot k = -j$

Δηλαδή, δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα.

Ορισμός: Ο αριθμός $a - bi$ λέγεται συζυγής του $z = a + bi$ και συμβολίζεται με $\bar{z}$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{(a+bi)}} = \overline{(\overline{a+bi})} = \overline{(a-bi)} = a + bi = z$$

Ιδιότητες:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Απόδειξη για την 2η ιδιότητα.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = \ldots = \overline{(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)}$$

$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

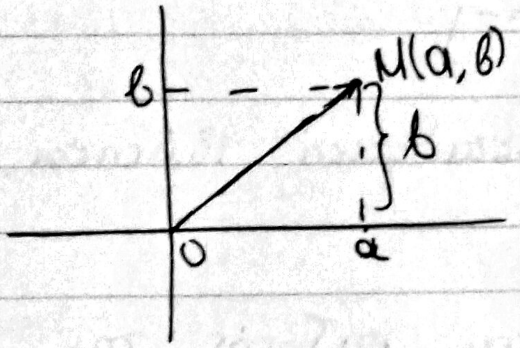
$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(a_1 + b_1 i)}\ \overline{(a_2 + b_2 i)} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \ldots$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 \cdot b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$z+\overline{z} = (\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta \cdot i) = 2\alpha = 2Re(z)$
$z-\overline{z} = (\alpha+\beta i)-(\alpha-\beta i) = 2\beta i = 2Im(z)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $z=\alpha+\beta i$. Ο πραγματικός αριθμός $|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ονομάζεται μέτρο του $z \in \mathbb{C}$

<u>Γεωμετρική Παράσταση</u>



$|OM| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ από Πυθαγόρειο Θεωρ.

Το μέτρο του $z=\alpha+\beta i$ είναι το μήκος του ευθ. τμήματος OM.

<u>Ιδιότητες Μέτρου</u>

1) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

4) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$

5) Τριγωνική Ανισότητα: $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

Φυλλάδιο #1 | Άσκηση 2

$z = -5+7i \qquad \bar{z} = -5-7i$

$z = -4+9i \qquad \bar{z} = -4-9i$

$z = 4i \qquad \bar{z} = -4i$

Άσκηση 3

Βρείτε τα μέτρα:

- $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

- $\left|\dfrac{3+i}{4-3i}\right| = \dfrac{|3+i|}{|4-3i|} = \dfrac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

- $|(1-i)|^2 \cdot |(1+i)|^4 = \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^4$

$= \sqrt{2}^2 \cdot \sqrt{2}^4 = 2 \cdot 2^2 = 8$

Άσκηση 4

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1.$

Άσκηση 5

$(\longrightarrow)$ $z = a+bi$ πραγματικός $\Rightarrow b=0$

$z = a+0i, \quad \bar{z} = a-0i \Rightarrow z = \bar{z}$

$(\longleftarrow)$ $z = \bar{z} \Rightarrow a+bi = a-bi \Rightarrow a=a$ και $b=-b \Rightarrow b=0$

Άρα $z = a+0i \Rightarrow z$ πραγματικός

Ασκηση 6

$z_1 = \frac{5-9i}{7+4i}$ $z_2 = \frac{5+9i}{7-4i}$ $\boxed{\overline{z_1} = z_2}$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$ πραγματικός.